

Towards a classification of quantum flag manifolds

東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻

星野 真生 (Mao HOSHINO) *

概要

量子群は物理学に背景をもちつつも、現在では純粋に数学的な対象として多くの研究者の関心を集めている。また量子群そのものだけでなく、その作用も主要な研究対象の一つであり、Letzter に端を発する量子対称空間など今なお盛んに研究が行われている。この講演では、旗多様体（もしくは半単純軌道）の量子化について紹介し、 $SU(2)$ や $SU(3)$ の場合にその分類結果について紹介する。また可能であれば、その分類結果と Poisson 幾何、表現論との関わりについて紹介する。

1 萌芽： $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とその一般化

まず、量子群に触れたことがない方のために、最も簡単な（しかし重要な）例である $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を紹介する。これは生成元 $E, F, K^{\pm 1/2}$ と次のような関係式によって定義される $\mathbb{C}$ 代数^{*1}（に余積と呼ばれる後述の構造を付け加えたもの）である：

$$\begin{aligned} K^{\pm 1/2} E &= q^{\pm 1} E K^{\pm 1/2}, & K^{\pm 1/2} F &= q^{\mp 1} F K^{\pm 1/2}, \\ K^{1/2} K^{-1/2} &= K^{-1/2} K^{1/2} = 1, & [E, F] &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

これがどのように $\mathfrak{sl}_2$ と関連しているかを説明するために、完備（位相） $\mathbb{C}[[h]]$ -代数 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ を生成元 E, F, H と次の関係式により定義する：

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{e^h - e^{-h}}.$$

このとき $q = e^h, K^{\pm 1/2} = e^{\pm hH/2}$ とおくと、先ほどの関係式を満たしていることに注意されたい。そこで $h = 0$ としてみると、この関係式は

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H$$

となり、いわゆる $\mathfrak{sl}_2$ の関係式が得られることがわかる。

また、このように形式的冪級数に準拠せずとも、表現論の観点から $\mathfrak{sl}_2$ との関連を示唆することもできる。左 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群であって $\mathbb{C}$ 線型空間として有限次元なものを $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現と

* E-mail: mhoshino@ms.u-tokyo.ac.jp

^{*1} 本稿では特に断らない限り $q \in \mathbb{C}^\times$ は 1 の冪根でないとする。また必要に応じて q の有理数乗も固定しておく。

いう．次のように定義される準同型 $\Delta: U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を用いることで，二つの表現 M, N のテンソル積 $M \otimes N$ が自然に定まることに注意されたい：

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \quad \Delta(K^{\pm 1/2}) = K^{\pm 1/2} \otimes K^{\pm 1/2}.$$

Proposition 1.1 (well-known). $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現は完全可約であり，既約表現の同値類は非負半整数と符号の組 $(n/2, \pm)$ で分類される．さらに対応する既約表現を $V_{n/2, \pm}$ とおくと，それらのテンソル積は次のように既約表現に分解する：

$$V_{n/2, \pm} \otimes V_{m/2, \pm} \cong V_{(n+m)/2, \pm} \oplus V_{(n+m-2)/2, \pm} \oplus \cdots \oplus V_{|n-m|/2, \pm}.$$

ただし右辺の符号は左辺が同符号なら $+$ ，異符号なら $-$ である．

特に有限次元表現で $V_{n/2} := V_{n/2, +}$ の直和に分解するものを有限次元可積分表現もしくは **1 型表現** という^{*2}．上述の命題によれば， $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元既約可積分表現と $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現が 1 対 1 で対応し，さらにテンソル積の既約分解則まで完全に一致していることがわかる．例えば $V_{1/2}$ は $\mathfrak{sl}_2$ の $\mathbb{C}^2$ への自然な作用に対応し，次のように行列表示することができる：

$$E = \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad K^{1/2} = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

最後にもう一つの見方として， $SL_2(\mathbb{C})$ との類似についても紹介する． $\mathbb{C}$ 係数 4 変数多項式を $M_2(\mathbb{C})$ 上の関数とみなして，その $SL_2(\mathbb{C})$ への制限がなす $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{O}(SL_2)$ を考える．これは多項式環 $\mathbb{C}[a, b, c, d]$ を $ad - bc$ が生成するイデアルで割って得られる $\mathbb{C}$ 代数に他ならない．

一方で $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の ($\mathbb{C}$ 線型空間としての) 双対空間 $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*$ は $fg = (f \otimes g) \circ \Delta$ により (可換ではない) $\mathbb{C}$ 代数になる．そこで $V_{1/2}$ の行列係数 a, b, c, d が生成する部分環 $\mathcal{O}_q(SL_2)$ を考える：

$$a(x) = e^+(xe_+), \quad b(x) = e^+(xe_-), \quad c(x) = e^-(xe_+), \quad d(x) = e^-(xe_-).$$

ここで (e_+, e_-) は標準基底であり， (e^+, e^-) はその双対基底である．するとこの部分環は a, b, c, d が次の関係式のもとで非可換 $\mathbb{C}$ 代数となることがわかる：

$$\begin{aligned} ab &= qba, & ac &= qca, & bc &= cb, & bd &= qbd, & cd &= qdc, \\ ad - qbc &= 1, & da - qcb &= 1. \end{aligned}$$

またこの関係式は， $\mathcal{O}_q(SL_2)$ 係数行列を用いることで次のように整理できる：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}$$

$q = e^h$ としてから $h = 0$ とおくことで，この関係式が $\mathcal{O}(SL_2)$ のものと一致することが確認できる．

ここまでの話を一般化したものが **Drinfeld-神保変形** である．一般に複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{sl}_n$ や $\mathfrak{so}_n$ など) が与えられると，それに対して $\mathfrak{g}$ の量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ が定義される． $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の場合と同様に表現論が展開でき，完全可約性，最高ウェイト理論，BGG 圏 $\mathcal{O}$ など $\mathfrak{g}$ の表現論と同じような結果が成立する．またこれを用いると，連結複素半単純 Lie 群 G について $\mathcal{O}(G)$ の類似物である量子展開環 $\mathcal{O}_q(G)$ が定義できる．これらの詳細な定義は本稿では重要でないため省略するが，参考文献として [Jan96, Jim12, Kas95, KS97, VY20] をあげておく．

^{*2} これは $K^{1/2}$ の作用が対角化可能かつ固有値が $q^{n/2}$ の形に限るというように特徴づけることができる．

2 量子化と Poisson 構造

「量子化」という言葉が使われる典型的な状況は「 q というパラメーターを伴った数学的対象であって、 $q = 1$ とおくことで元の数学的対象が得られるとき」である。前節で紹介した $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ や $\mathcal{O}_q(SL_2)$ はその意味でそれぞれ $U(\mathfrak{sl}_2)$ と $\mathcal{O}(SL_2)$ の量子化となっている。この状況をもっとも厳密に定式化したものが変形量子化である^{*3}。

Definition 2.1. A を可換 $\mathbb{C}$ 代数とする。 A の変形量子化とは、完備位相 $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 代数 $A_\hbar$ と $\mathbb{C}$ 代数の同型 $A_\hbar/\hbar A_\hbar \cong A$ の組であって、 $A_\hbar$ が位相 $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 加群として $A[[\hbar]]$ に同型であるもののことである。

より平易な定式化として、 A 係数形式的冪級数を用いる方法もある。その場合、 A の変形量子化とは $A[[\hbar]]$ 上の連続な積 $*_\hbar$ であって、 $a, b \in A$ に対して次のような表示をもつもののことである：

$$a *_\hbar b = ab + \sum_{n=1}^{\infty} m_n(a, b) \hbar^n.$$

ここで m_n は $A \times A$ から A への双線型写像である。

Example 2.2. 前節の $\mathcal{O}_q(SL_2)$ の関係式において、 $q = e^\hbar$ と置いて得られる $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 代数の $\hbar$ 進完備化を $\mathcal{O}_\hbar(SL_2)$ とおく。するとこれは自然な方法で $\mathcal{O}(SL_2)$ の変形量子化を与える。

さて、 $A_\hbar \cong A[[\hbar]]$ と A の可換性により、 $(x, y) \mapsto [x, y]$ は $A \times A$ から $\hbar A_\hbar/\hbar^2 A_\hbar \cong A$ への双線型写像 $\{\cdot, \cdot\}$ を誘導する。冪級数を用いれば $\{a, b\} = m_1(a, b) - m_1(b, a)$ である。交換子の性質により、これが次の性質を満たすことが確認できる：

- (i) $\{a, b\} = -\{b, a\}$ (歪対称性) .
- (ii) $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$ (Leibniz 則) .
- (iii) $\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0$ (Jacobi 恒等式) .

一般にこのような双線型写像を A 上の **Poisson 括弧**といい、組 $(A, \{\cdot, \cdot\})$ を **Poisson 代数**と呼ぶ。上述の考察は、 A の変形量子化から A 上の Poisson 括弧が得られることを意味する。この逆問題、つまり与えられた Poisson 代数 $(A, \{\cdot, \cdot\})$ に対し、 A の変形量子化 $A_\hbar$ であってものの Poisson 括弧を誘導するものが存在するかどうかという問題をしばしば**量子化問題**という。

この問題で最も関心を集めた設定は、 A として可微分多様体 M 上の C^∞ 級関数環 $C^\infty(M)$ を考えたものである。一般に可微分多様体 M と $C^\infty(M)$ 上の Poisson 括弧の組を **Poisson 多様体**という。これはある種シンプレクティック多様体を退化させたものといえることができ、実際にシンプレクティック多様体 (M, ω) に対して $TM \cong T^*M$ のもと ω に対応する双ベクトル場 π_M により $C^\infty(M)$ 上の (非退化な) Poisson 括弧を定めることができる。よく知られているように、シンプレクティック多様体は物理学における古典系の相空間の数学的定式化が背景にあり、その意味で量子化

^{*3} ただし、 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の量子化としての $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ には別の概念を用意する必要がある。

問題は与えられた古典系の正準量子化を常に行えるかどうかを問う問題に他ならない。この問題はまずシンプレクティック多様体の場合に解決され、一般の Poisson 多様体の場合は Kontsevich により解決された。

Theorem 2.3 (M. Kontsevich [Kon03]). 任意の Poisson 多様体 $(M, \{\cdot, \cdot\})$ に対し、その変形量子化 $C^\infty(M)$ であって誘導する Poisson 括弧がもとの Poisson 括弧に一致するものが存在する。

Kontsevich 以前にも、シンプレクティック多様体の変形量子化については Fedosov やその他の研究者により存在が示されている。このことについては、[Wei95] にまとめられている。

3 既約表現とシンプレクティック葉

本節では本稿のもう 1 つのトピックである作用素環、特に C^* 環の紹介をする。参考文献として [Tom24] をあげておく。

Definition 3.1. C^* 環とは、(可換とは限らない) $\mathbb{C}$ 代数 A 、その上の「複素共役」である共役線型写像 $*$: $A \rightarrow A$ 、完備ノルム $\|\cdot\|: A \rightarrow [0, \infty)$ の 3 つ組であって、任意の $x, y \in A$ に対して次の条件を満たすもののことである。

$$(xy)^* = y^*x^*, \quad x^{**} = x, \quad \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

また C^* 環 A, B に対し、 A から B への $\mathbb{C}$ 代数準同型 φ であって $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ を満たすものを $*$ 準同型と呼ぶ^{*4}。

C^* 環はしばしば非可換な空間と呼ばれるが、これは次の定理に基づく見方である^{*5}

Theorem 3.2 (Gelfand-Naimark). 可換 C^* 環とその間の $*$ 準同型のなす圏は、コンパクト Hausdorff 空間とその間の連続写像のなす圏に反変圏同値である。

一般に、 $\mathbb{C}$ 代数 A とその上の共役線型写像 $*$: $A \rightarrow A$ の組であって、 C^* 環と同じような条件を満たすものを $*$ 代数という。またその複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への作用 π であって $\langle \pi(x^*)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \pi(x)\eta \rangle$ を満たすものを A の $*$ 表現もしくは単に表現という。 C^* 環を構成する方法の一つとして、 $*$ 環 A をとり、その表現が全て連続になるように適切に A にノルムを入れ、さらに完備化をとるという方法がある。このようにして得られる C^* 環を A の包絡 C^* 環という^{*6}。

代数的な方法で定義された「量子化」に対して、その包絡 C^* 環をとることで作用素環としての「量子化」を考えることができる。

Example 3.3. $0 < q < 1$ のとき、 $\mathcal{O}_q(SL_2)$ に次のような方法で $*$ 環の構造が入る：

$$a^* = d, \quad b^* = -qc, \quad c^* = -q^{-1}b, \quad d^* = a.$$

この $*$ 環を $\mathcal{O}_q(SU(2))$ で表し、さらにその包絡 C^* 環を $C_q^*(SU(2))$ で表す。

^{*4} C^* 環の射としてはノルム位相に関する連続性も仮定するのが自然だが、実は自動的に成り立つ。

^{*5} あくまでも 1 つの見方であって、例えば群の類似物や行列環の類似物と思った方が解釈しやすいときもある。

^{*6} ただし、いつでもこのような構成法が適用できるわけではない。

より一般に、 K を連結半単純コンパクト Lie 群とし、 G をその複素化として得られる連結複素半単純 Lie 群とする。このとき量子展開環 $\mathcal{O}_q(G)$ に対して適切に $*$ 代数の構造を入れることで $\mathcal{O}_q(K)$ が定義される。さらにその包絡 C^* 環をとることで $C_q(K)$ が定義される。これは K に定まる標準的な Poisson 構造に関する量子化とみなせる。

Example 3.4. K を単連結コンパクト Lie 群とする。このとき K の閉部分群 K' であって、さらに標準的な Poisson 構造に関する Poisson 部分多様体になっているものを考えると、 K/K' にも Poisson 構造が入る。このとき、自然な方法で K/K' の「量子化」である $C_q(K/K')$ が定義できる。特に、**旗多様体の標準的な量子化**がこの構成で得られる (c.f. 例 4.5)。

Example 3.5 (Podleś [Pod87]). $0 < q < 1$ とする。 $\varphi \in \mathbb{C}$ に対して、 $\mathcal{O}_{q,\varphi}(SL_2/H)$ を次の関係式を満たす X, Y, Z で生成される $\mathbb{C}$ 代数とする：

$$\begin{aligned} XZ &= q^2 ZX, \quad YZ = q^{-2} ZY, \\ q^{-1}XY &= \frac{\varphi^2 - 1}{4} - \frac{q(\varphi + 1) + q^{-1}(\varphi - 1)}{2} q^{-1}Z + q^{-2}Z^2, \\ q^{-1}YX &= \frac{\varphi^2 - 1}{4} - \frac{q(\varphi + 1) + q^{-1}(\varphi - 1)}{2} qZ + q^2Z^2. \end{aligned}$$

さらに $\varphi \in \mathbb{R}$ の場合、この $\mathbb{C}$ 代数には次のようにして自然に $*$ 代数の構造を入れることができる：

$$X^* = -Y, \quad Y^* = -X, \quad Z^* = Z.$$

この $*$ 代数を $\mathcal{O}_{q,\varphi}(S^2)$ で表す。この関係式で $q = 1$ とおき、 $x = X - Y, y = i(X + Y), z = 2Z - \varphi$ とおくと、 $x^* = x, y^* = y, z^* = z, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ が得られるため、 $\mathcal{O}_{q,\varphi}(S^2)$ は 2 次元球面の「量子化」と言うことができる。 $-1 \leq \varphi \leq 1$ の場合に、この $*$ 代数は非自明な包絡 C^* 環 $C_{q,\varphi}(S^2)$ を持つ。これを **Podleś 球面**と呼ぶ。この場合も、然るべき S^2 上の Poisson 構造に関する S^2 の「量子化」とみなせる。

変形量子化では不定元 $\hbar$ に関する次数ごとに係数をみることで Poisson 構造との関係を直接的に見ることができた。一方で作用素環の設定では固定された実数 q について考えるため、このようなことはできない。しかし、それでも表現を観察することでその影をみることができる。次の Poisson 多様体に関する一般論が重要である。

Theorem 3.6. $(M, \{\cdot, \cdot\})$ を Poisson 多様体とする。このとき自然な方法で M を連結なシンプレクティック多様体の族に（集合として）直和分解することができる。この分解における各シンプレクティック多様体を**シンプレクティック葉**という。

次の事実が知られている。

Theorem 3.7. 以下の「量子化」 A_q について、 A_q の既約表現のユニタリ同値類と「対応する」 Poisson 多様体のシンプレクティック葉との間に全単射が存在し、しかるべき位相について同相になる。

(i) 単連結コンパクト Lie 群 K について、 $A_q = C_q(K)$. (Levendorskii-Soibelman [LS91])

- (ii) 単連結コンパクト Lie 群 K とその Poisson 閉部分群 K' について, $A_q = C_q(K/K')$.
(Dijkhuizen-Stokman [SD99], Neshveyev-Tuset [NT12])
- (iii) $-1 \leq \varphi \leq 1$ のとき, Podleś 球面 $A_q = C_{q,\varphi}(S^2)$. (Podleś [Pod87])

さらに, この対応のもとで 0 次元シンプレクティック葉と 1 次元表現が対応し, 1 次元以上のシンプレクティック葉は全て無限次元表現に対応する.

このように, 既約表現とシンプレクティック葉の対応を通じて作用素環的な量子化と Poisson 構造は関連することがある. そこで次のような問題を考えるのは自然である.

Problem 3.8. 与えられた Poisson 多様体 M に対して, その「量子化」 $C_q(M)$ を定式化することはできるか? またそれができた場合, $C_q(M)$ の既約表現と M のシンプレクティック葉を関連付けることはできるか?

Problem 3.9. 与えられた多様体 M に対して, その「量子化」と M に入りうる Poisson 構造の間に対応を作ることとはできるか? あるいは, どのような Poisson 構造に対して「量子化」が存在し, またそれはどれくらい存在するか?

これらの問題を一般性と厳密性をともなって定式化するのは難しいように思うが, 筆者が興味を持っている量子等質空間の文脈では, 比較的扱えるよい設定を与えられるように思う. 次節でそのための枠組みを紹介し, その後筆者が現在得ている結果について紹介する.

4 量子群作用における淡中-Krein 双対性

まず, 作用素環論ではコンパクト量子群とよばれるコンパクト群の自然な一般化がある. これはコンパクト群を「量子化」したものではなく, C^* 環という「非可換な空間」に基づいてコンパクト群を再定式化して得られるものである. コンパクト量子群の概念が Woronowicz によって見出されて以降, 多くの研究者によって理論が整備・展開されてきた (例えば [NT13] を参照):

- 有限次元表現論 (完全可約性, Peter-Weyl の定理).
- 具体例の構成 (Drinfeld-神保変形, 自由ユニタリ群, 有限グラフの量子自己同型群など).
- 淡中-Krein 双対性 (作用素環論的なテンソル圏とそのファイバー関手の組との対応).
- Pontryagin 双対性 (離散量子群との対応).
- ...

その定義の発想は非常に簡潔である. コンパクト群 G があると, その積演算 $m: G \times G \rightarrow G$ が得られる. そこでこれが誘導する $*$ 準同型 $m^*: C(G) \rightarrow C(G \times G)$ を考えると実は $C(G \times G)$ は適切な意味でのテンソル積 $C(G) \otimes C(G)$ に同型になっているため $\Delta: C(G) \rightarrow C(G) \otimes C(G)$ を与える. コンパクト量子群の定義はこの $C(G)$ を C^* 環 A に置き換えることで得られる. 同様に, G 空間 X が与えられたとき, 作用 $\alpha: G \times X \rightarrow X$ は $C(X) \rightarrow C(G \times X) \cong C(G) \otimes C(X)$ を誘導するため, $C(G)$ を A に, $C(X)$ を B に置き換えることで, C^* 環 B への作用が定義される.

Definition 4.1. *⁷コンパクト量子群とは、C*環 A と * 準同型 $\Delta: A \longrightarrow A \otimes A$ の組 $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ であって、次の条件を満たすものである：

- (i) $(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta$.
- (ii) $\Delta(A)(A \otimes 1)$ と $\Delta(A)(1 \otimes A)$ は $A \otimes A$ の中で稠密.

また、コンパクト量子群 $\mathbb{G}$ の C*環 B への作用とは、* 準同型 $\beta: B \longrightarrow A \otimes B$ であって、次の条件を満たすもののことである：

- (i) $(\text{id} \otimes \beta)\beta = (\Delta \otimes \text{id})\beta$.
- (ii) $\beta(B)(A \otimes 1)$ が $A \otimes B$ の中で稠密.

Example 4.2. 連結半単純コンパクト Lie 群 K と $0 < q < 1$ について、 $C_q(K)$ は自然な方法でコンパクト量子群を定める。これを K_q で表し、 K の Drinfeld-神保変形という。

さて、コンパクト群 G の等質空間とは、局所コンパクト空間 X への G の推移的作用のことであった。この推移性は、作用が誘導する $C(X)$ への G の作用に関して、その不動点環 $C(X)^G = \{f \in C(X) \mid f \circ \alpha_g = f \text{ for all } g \in G\}$ が定数関数のみからなることに同値である。このことを踏まえて量子等質空間は次のように定義される。

Definition 4.3. $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ をコンパクト量子群とする。 $\mathbb{G}$ の量子等質空間とは、C*環 B とそこへの $\mathbb{G}$ の作用 β の組であって、不動点環 $B^{\mathbb{G}} = \{b \in B \mid \beta(b) = 1 \otimes b\}$ が $\mathbb{C}$ に一致しているもののことである。

この定義も C*環に基づいて等質空間の概念を再定式化したものに過ぎず、何らかの等質空間の量子化を与えるものではまったくない。実際、コンパクト群 G の既約ユニタリ表現 V が与えられたとき、 $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ は共役作用により G の量子等質空間になっている。

さて、 $\mathbb{G}$ の量子等質空間 B が与えられると、その上の「 $\mathbb{G}$ 同変 Hermite 束」の類似物を考えることができる。この圏を $\mathbb{G}\text{-Mod} B$ とすると、これは次の構造・性質を備えている ([DC17])：

- (i) 半単純である。
- (ii) $M \in \mathbb{G}\text{-Mod} B^f$ について、その自己準同型環は自然な方法で C*環になる。
- (iii) 任意の射 $f: M \longrightarrow N$ について、その随伴 $f^*: N \longrightarrow M$ が定まり、 f^*f は「半正定値」である。
- (iv) $M \in \mathbb{G}\text{-Mod} B^f$ と $\mathbb{G}$ の有限次元ユニタリ表現 V に対して、自然なテンソル積 $V \otimes M \in \mathbb{G}\text{-Mod} B^f$ が定まる。
- (v) 任意の $M \in \mathbb{G}\text{-Mod} B^f$ について、 $\mathbb{G}$ の有限次元ユニタリ表現 V であって $M \subset V \otimes B$ となるものが存在する。

このような構造を備えた圏を $\mathbb{G}$ の有限次元表現圏 $\text{Rep}^f \mathbb{G}$ 上の連結な点付き半単純 C*加群圏という。これに関して次の双対定理が知られている。

*⁷ 実はいくつか不正確な点が含まれている。

Theorem 4.4 (De Commer-Yamashita [DCY13], Neshveyev [Nes14]). コンパクト量子群 $\mathbb{G}$ について、その量子等質空間と $\text{Rep}^f \mathbb{G}$ 上の連結な点付き半単純 C^* 加群圏との間に自然な対応が存在する。

Example 4.5. $\mathbb{H} = (C(\mathbb{H}), \Delta)$ を $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ の部分コンパクト量子群とする。このとき、 $\mathbb{H}$ の表現圏 $\text{Rep}^f \mathbb{H}$ は表現の制限を通して $\text{Rep}^f \mathbb{G}$ 上の連結な点付き半単純 C^* 加群圏となっている。このとき対応する量子等質空間は $C(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = C(\mathbb{G})^{\mathbb{H}}$ である。

Example 4.6 ([DCNTY19]). $t \in \mathbb{R}$ に対して $B_t \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を $B_t = q^{-1}(E - FK) - itK$ で定め、これが生成する $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の部分環を $U_q(\mathfrak{so}_2)_t$ とする。するとこれは $\Delta(U_q(\mathfrak{so}_2)) \subset U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{so}_2)_t$ を満たし、特に $U_q(\mathfrak{so}_2)_t$ 加群と $SU_q(2)$ の表現とのテンソル積を考えることができる。そこで $SU_q(2)$ の表現の制限として得られる既約表現が生成する $U_q(\mathfrak{so}_2)_t\text{-Mod}$ の充満部分圏を考えると、これは自然に連結な点付き半単純 C^* 加群圏となる。これについて、対応する $SU_q(2)$ の量子等質空間は Podleś 球面である。

5 旗多様体の量子化

例 4.5 で見たように、部分群で割って得られるような量子等質空間はちょうどその部分群の表現に対応する。もし $\mathbb{G}$ がコンパクト群 G の「量子化」で、さらに G の閉部分群 H に対応する $\mathbb{G}$ の部分コンパクト量子群 $\mathbb{H}$ が存在すれば、 $\mathbb{H}$ の表現圏を考えることで G/H の量子化として $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ が考えられる。しかしこれは標準的な量子化を考えているだけであり、例 4.6 のような非自明な量子化まで含めて考えることには失敗している。

これを解消するために、テンソル積の既約分解則に注目する。

Definition 5.1. コンパクト量子群 $\mathbb{G}$ に対して、その表現環もしくは **fusion 代数** とは、その有限次元表現の同値類を生成元とし、次の関係式を考えることでえられる環 $\mathcal{R}(\mathbb{G})$ である^{*8}：

$$[V \oplus W] = [V] + [W], \quad [V \otimes W] = [V][W].$$

同様に、 $\text{Rep}^f \mathbb{G}$ 上の半単純 C^* 加群圏 $\mathcal{M}$ に対して、その **fusion 加群** とは、 $\mathcal{M}$ の対象の同型類を生成元とし、次の関係式を考えることで得られる $\mathcal{R}(\mathbb{G})$ 加群 $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ のことである：

$$[M \oplus N] = [M] + [N], \quad [U \otimes M] = [U][M].$$

K を連結半単純コンパクト Lie 群とする。このとき $\mathcal{R}(K_q)$ と $\mathcal{R}(K)$ の間には自然な同型があることが知られているため、これを $\mathcal{R}_K$ で表す。すると、 K の量子等質空間と K_q の量子等質空間の両方から $\mathcal{R}_K$ 上の fusion 加群を比較することができる。そこで次のようにして K の等質空間の量子化を定義する。

Definition 5.2. X を K の等質空間とし、 $\mathcal{R}(X)$ を K の量子等質空間 $C(X)$ に対応する $\mathcal{R}(K)$ の fusion 加群とする。このとき X の K_q **同変量子化** とは、以下のような組 $(\mathcal{M}, \varphi)$ のことである：

^{*8} 本当は単なる環ではなく、生成系の情報も加えた $\mathbb{Z}^+$ 環というものである。fusion 加群についても同様。

- $\text{Rep}^f K_q$ 上の連結な点付き半単純 C^* 加群圏 $\mathcal{M}$.
- $\mathcal{R}_K$ 上の fusion 加群としての同型 $\varphi: \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(X)$.

Remark 5.3. この定義の中で fusion 加群の同型 $\mathcal{R}(X) \cong \mathcal{R}(M)$ を固定していることは、気持ちとしては変形量子化の定義における同型 $A_h/hA_h \cong A$ の固定に相当することである。

この定義を踏まえて、 X の K_q 同変量子化の構成および分類について考えることができる。ここでは特に K として $SU(n)$ を考え、さらに X として $SU(n)/T$ (ただし T は対角行列からなる閉部分群) を考える。

このとき、 $SU(n)/T$ 上の Poisson 構造であって $SU(n)$ の作用と整合的^{*9}なものは、次の条件を満たす $\varphi = (\varphi_{ij})_{i \neq j} \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$ のなす空間 $X_{SU(n)/T}$ により分類される：

$$\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}, \quad \varphi_{ij}\varphi_{jk} + 1 = \varphi_{ik}(\varphi_{ij} + \varphi_{jk})$$

似たような記述は一般の単連結半単純コンパクト Lie 群 K と、その極大トーラスを含む連結閉部分群 L についても知られている。それを $X_{K/L}$ で表す。 K/L の変形量子化で Drinfeld-神保変形と整合的なものに関して、次のことが知られている。

Theorem 5.4 (J. Donin [Don01]). K/L の K_h 同変変形量子化の族 $\{\mathcal{O}_{h,\varphi}(K/L)\}_{\varphi \in X_{K/L}}$ であって、 φ に関して代数的なものが存在する。また、 K/L の K_h 同変変形量子化 $\mathcal{O}_h(K/L)$ に対して、 $\varphi \in X_{K/L}[[\hbar]]$ であって $\mathcal{O}_h(K/L) \cong \mathcal{O}_{h,\varphi(h)}(K/L)$ となるものが一意に存在する。

ただしこの結果は関連するコホモロジー群の消滅によって示されており、具体的でない。具体的な構成法については Etingof らと Mudrov により generic な $\varphi \in X_{K/L}$ に対して与えられた ([EEM07, Mud07])。これは $U(g)$ の表現論における Verma 加群の構成を少しひねり、その End 環の然るべき部分環として変形量子化が実現できるというものである。

筆者は、この構成を K_q 同変量子化の構成に応用するために、次のような結果を示した。

Theorem 5.5 (H. [Hos25], c.f. De Commer [DC13]). 変形された量子包絡環の代数的な族 $\{U_{q,\varphi}(\mathfrak{t})\}_{\varphi \in X_{K/L}}$ を然るべき意味での integral form として構成でき、 $q = e^h$ とおいて Verma 加群の構成をまねることで K/L の K_h 同変変形量子化の代数的な族を $X_{K/L}$ 上で構成できる。

特に定理 5.4 の後半の主張により、任意の同変変形量子化が構成できている。また integral form で構成を行っているため、作用素環の設定にも応用できる。特に $K = SU(n), X = SU(n)/T$ の場合に、次のことを示した。

Theorem 5.6 (H. in preparation). $X_{SU(n)/T}^{\text{quot}} := X_{SU(n)/T} \cap [-1, 1]^{n(n-1)}$ とおく。

- 任意の $\varphi \in X_{SU(n)/T}^{\text{quot}}$ について、 $U_{q,\varphi}(\mathfrak{su}(n))$ をもとに $SU(n)/T$ の $SU_q(n)$ 同変量子化 $(SU(n)/T)_{q,\varphi}$ が構成できる。
- $(SU(n)/T)_q$ を $SU(n)/T$ の $SU_q(n)$ 同変量子化とする。このとき $\varphi \in X_{SU(n)/T}^{\text{quot}}$ であって $(SU(n)/T)_q \cong (SU(n)/T)_{q,\varphi}$ となるものが一意に存在する。

^{*9} これは $SU(n)$ の作用で不変という意味ではなく、 $SU(n)$ に定まる標準的な Poisson 構造と整合的という意味である。

参考文献

- [DC13] K. De Commer, *Representation theory of quantized enveloping algebras with interpolating real structure*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **9** (2013), Paper 081, 20. MR3208147
- [DC17] K. De Commer, *Actions of compact quantum groups*, Topological quantum groups, Banach Center Publ., vol. 111, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2017, pp. 33–100. MR3675047
- [DCNTY19] K. De Commer, S. Neshveyev, L. Tuset, and M. Yamashita, *Ribbon braided module categories, quantum symmetric pairs and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Comm. Math. Phys. **367** (2019), no. 3, 717–769. MR3943480
- [DCY13] K. De Commer and M. Yamashita, *Tannaka-Kreĭn duality for compact quantum homogeneous spaces. I. General theory*, Theory Appl. Categ. **28** (2013), No. 31, 1099–1138. MR3121622
- [Don01] J. Donin, *$U_h(\mathfrak{g})$ invariant quantization of coadjoint orbits and vector bundles over them*, J. Geom. Phys. **38** (2001), no. 1, 54–80. MR1817512
- [SD99] J. V. Stokman and M. S. Dijkhuizen, *Quantized flag manifolds and irreducible $*$ -representations*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), no. 2, 297–324. MR1697598
- [EEM07] B. Enriquez, P. Etingof, and I. Marshall, *Quantization of some Poisson-Lie dynamical r -matrices and Poisson homogeneous spaces*, Quantum groups, Contemp. Math., vol. 433, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 135–175. MR2349621
- [Hos25] M. Hoshino, *Polynomial Families of Quantum Semisimple Coajoint Orbits via Deformed Quantum Enveloping Algebras*, Comm. Math. Phys. **406** (2025), no. 8.
- [Jan96] J. C. Jantzen, *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. MR1359532
- [Jim12] M. Jimbo, 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー現代数学シリーズ, vol. 1, 丸善出版, 2012.
- [Kas95] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1321145
- [Kon03] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216. MR2062626
- [KS97] A. Klimyk and K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1997. MR1492989
- [LS91] S. Levendorskiĭ and Y. Soibelman, *Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), no. 1, 141–170. MR1116413
- [Mud07] A. Mudrov, *Quantum conjugacy classes of simple matrix groups*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), no. 3, 635–660. MR2304470
- [Nes14] S. Neshveyev, *Duality theory for nonergodic actions*, Münster J. Math. **7** (2014), no. 2, 413–437. MR3426224
- [NT12] S. Neshveyev and L. Tuset, *Quantized algebras of functions on homogeneous spaces with Poisson stabilizers*, Comm. Math. Phys. **312** (2012), no. 1, 223–250. MR2914062
- [NT13] S. Neshveyev and L. Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 20, Société Mathématique de France, Paris, 2013. MR3204665
- [Pod87] P. Podleś, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), no. 3, 193–202. MR0919322
- [Tom24] R. Tomatsu, 作用素環論入門, 共立出版, 2024.
- [VY20] C. Voigt and R. Yuncken, *Complex semisimple quantum groups and representation theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2264, Springer, Cham, 2020. MR4162277
- [Wei95] A. Weinstein, *Deformation quantization*, Astérisque **227** (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409 (English, with French summary). Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. MR1321655